Vytauto Didžiojo Universiteto Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai 1937

Mémoires de la Faculté des Sciences de l'Université de Vytautas le Grand 1937

T. XI.

I sąsiuvinys

Matematikos skyrius

Section de Mathématiques

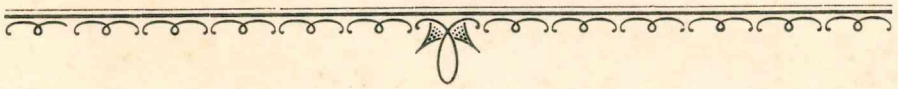
Redaktorius e. o. prof. **IG. KONČIUS**

Kaunas Akc. „Spindulio" B-vės spaustuvė 1937

5(05) Dzu 2960-11/1

Vytauto Didžiojo Universiteto Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai 1937

Mémoires de la Faculté des Sciences de l'Université de Vytautas le Grand 1937



T. XI.

I sąsiuvinys

Matematikos skyrius

Section de Mathématiques

Redaktorius e. o. prof. **IG. KONČIUS**

Kaunas Akc. „Spindulio" B-vės spaustuvė 1937

O. E. Stanaitis

Iš Lamé funkcijų teorijos

Beitrag zur Theorie der Laméschen Funktionen

Spręsdami matematinės fizikos problemas, susiduriame su tiesinėmis diferencialinėmis lygtimis, kurių sprendiniai turi patenkinti tam tikras ribines sąlygas. Panaudoję vadinamas Green'o funkcijas, tokių diferencialinių lygčių sprendimą suvedame į tiesines simetriškas integralines lygtis. Green'o funkcijos $K(s,t)$ charakteringa savybė yra ta, kad jos dalinė išvestinė $\frac{\partial K}{\partial s}$ visoje srityje yra tolydinė, išskiriant vietą $s=t$, kur ji yra truki. Tokia Green'o funkcija yra nustatyta ir Lamé diferencialinei lygčiai[1]). Bet taip nustatyta Lamé funkcijų integralinė lygtis turi daugiau teorinės reikšmės: praktiškiems skaičiavimams šios lygties branduolys (Kern) perdaug komplikuotas, ir integralinių lygčių metodais gauti sprendinius yra beveik neįmanoma.

Šiame darbe gautos Lamé funkcijos integralinės lygtys yra kiek kitokio tipo. Šių lygčių branduoliai nuo Green'o funkcijų skiriasi pirmiausia tuo, kad jų dalinės išvestinės yra tolydinės visoje srityje, neišskiriant ir vietą $s=t$. Be to, kiekviena Lamé funkcijų klasė patenkina atskiro tipo integralinę lygtį, kurių yra keletas. Šių integralinių lygčių išvedimas primena Laplace'o ir kitus metodus tiesinėms diferencialinėms lygtims spręsti, panaudojant integralus[2]). Ieškodami Mathieu, Lamé ir kitų diferencialinių lygčių perijodiškų sprendinių, tokius metodus sekmingai yra panaudoję Whittaker'is ir Ince. Šiuose darbuose panaudotiems metodams būdinga yra perijodiškumas[3]). Išvesdami čia Lamé funkcijų integralines lygtis, jokių perijodiškumo sąlygų nesame įvedę. Todėl ir gautieji rezultatai yra kiek bendresnio pobūdžio.

---

[1]) Plg. E. Hilb, Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Math. Ann. 63 t. (1907) 41 p.

[2]) Plg. R. Courant u. D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, 1 d. 2 leid. (1931) 405 p.

[3]) Whittaker, Proc. Int. Congress of Math. (1912); Proc. London Math. Soc. 2 XIV (1915) 260 p.

Ince, Proc. Royal Soc. Edin., XLII (1922) 43 p.

Panaudodami čia tuos metodus, pirmiausiai pradedame nuo Laplace'o n-tos eilės rutulinių funkcijų ir įrodome, kad kiekvienos tiesinės homogeninės integralinės lygties, kurios branduolys nustatytose ribose yra Laplace'o n-tos eilės rutulinė funkcija, sprendinys sutampa su n-to laipsnio paprastosiomis Lamé funkcijomis. Toliau parodome, kad egzistuoja $\sigma+1$ tiesiškai nesurištų branduolių $P(\mu,\nu)$, $n-\sigma$ branduolių $Q(\mu,\nu)$, $n-\sigma$ branduolių $R(\mu,\nu)$, σ branduolių $S(\mu,\nu)$, kurių kiekvienas turi branduolių skaičių atitinkantį skaičių skirtingų ypatingų reikšmių (Eigenwerte) ir funkcijų (Eigenfunktionen). Čia σ yra $\frac{n}{2}$, kai n yra lyginis ir $\frac{n-1}{2}$, kai n yra nelyginis skaičius. Kiekvienos šių simetriškų branduolių grupės ypatingosios funkcijos sutampa su viena Lamé funkcijų klase. Iš čia gauname praktiškiems pritaikymams svarbią išvadą: kiekvienai Lamé funkcijų klasei galime parinkti tokią homogeninę simetrišką integralinę lygtį, kurios branduolys yra teigiamasis (positiv definiter Kern). Pasiremiant šiais išvadžiojimais, pabaigoj yra nurodyta, kaip integralinių lyčių teorijos metodais norimu tikslumu gauti apytikrias Lamé funkcijas.

Nenorėdami nutolti nuo klasiškų darbų, Lamé funkcijų suskirstymą ir pažymėjimus išrašėme iš Heine knygų[1]).

§ 1.

Laplace'o rutulinės funkcijos ir Lamé diferencialinė lygtis.

Diferencialinės lygties:

$$(1)\qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right)+n(n+1)f=0,$$

kur n yra sveikas teigiamas skaičius, sprendiniai, reguliarūs rutulio paviršiuje, vadinami Laplace'o rutulinėmis funkcijomis[2]). Dėl kiekvienos n reikšmės, kaip yra žinoma, egzistuoja $2n+1$ funkcijų f_n^{ν} ($\nu=1, 2, 3, \ldots, 2n+1$), taip išreiškiamų:

---

[1]) E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 1 t. 2 l. (1878).

[2]) Plg. R. Courant u. D. Hilbert, l. c. 270 ir 441 p.

(2) $P_{n,m}(\cos\vartheta)\cos m\varphi$, $P_{n,m}(\cos\vartheta)\sin m\varphi$, $m=0,1,2,\ldots,n$,

kur $P_{n,m}(\cos\vartheta)$ yra m-tos eilės Legendre'o funkcijos. Toliau žinome, kad srityje $-\pi\leqq\varphi\leqq\pi$ $o\leqq\vartheta\leqq\pi$ šios funkcijos yra ortogonalinės ir tiesiškai nesurištos.

Įvedame eliptiškas koordinatas[3]):

$$\cos\vartheta=\frac{\mu\nu}{bc},$$

(3) $$\sin\vartheta\cos\varphi=\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}},$$

$$\sin\vartheta\sin\varphi=\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}.$$

Tada (1) lygtis pereina į:

(4) $$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+n(n+1)(\mu^2-\nu^2)f=0,$$

kur įvesti pažymėjimai:

(5) $$u=\int_b^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},\quad v=\int_o^{\nu}\frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}.$$

Čia μ ir ν kinta intervaluose:

$$b\leqq\mu\leqq c,\quad -b\leqq\nu\leqq b,\quad o<b<c.$$

Ieškodami (4) diferencialinės lygties sprendinius, kurie yra formos:

$$f=E_1(\mu)\cdot E_2(\nu),$$

kur $E_1(\mu)$ yra argumento μ ir $E_2(\nu)$ argumento ν funkcijos, gauname, kad E_1 ir E_2 patenkina tą pačią diferencialinę lygtį:

(6) $$(z^2-b^2)(z^2-c^2)\frac{d^2E}{dz^2}+z(2z^2-b^2-c^2)\frac{dE}{dz}+$$
$$+[(b^2+c^2)v_s^n-n(n+1)z^2]E=0,$$

kur vietoje μ arba ν parašyta z, o vietoje E_1 ir E_2 stovi E. Ši diferencialinė lygtis vadinasi Lamé lygtimi. Kol v_s^n reiškia laisvai pasirenkamą konstantą, (6) lygtis turi be galo daug sprendinių.

---

[3]) Plg. E. Heine, l. c. 353 p.

Kad (6) lygties sprendiniai būtų sveikos racionalinės n laipsnio funkcijos argumentų z, $\sqrt{z^2-b^2}$, $\sqrt{z^2-c^2}$, v_s^n turi patenkinti tam tikrą algebrinę lygtį. Toliau žinome, kad tokių funkcijų egzistuoja 4 klasės:

$$
\begin{aligned}
&\sigma+1 \text{ funkcijų } K(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-2} + \dots \\
(7)\quad &n-\sigma \quad „ \quad L(z) = \sqrt{z^2-b^2}\,(a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-3} + \dots) \\
&n-\sigma \quad „ \quad M(z) = \sqrt{z^2-c^2}\,(a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-3} + \dots) \\
&\sigma \quad „ \quad N(z) = \sqrt{z^2-b^2}\sqrt{z^2-c^2}\,(a_0 z^{n-2} + a_1 z^{n-4} + \dots),
\end{aligned}
$$

kur $\sigma = \frac{n}{2}$, kai n lyginis, ir $\sigma = \frac{n-1}{2}$, kai n nelyginis skaičius. Koeficientai $a_1, a_2, \dots$ nustatomi, integruojant begalinių eilučių metodu. Taip, pav., klasės K(z) koeficientams nustatyti gauname tokias redukcijos formulas:

$$
\begin{aligned}
&2(2n-1)\,a_1 = p\,(K - n^2)\,a_0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&2m\,(2n+1-2m)\,a_m = p\,[K - (n+2-2m)^2]\;a_{m-1} + \\
&\qquad\qquad + q\,(n+4-2m)\,(n+3-2m)\,a_{m-2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{\sigma+1} = 0 = p\,[K - (n-2\sigma)^2]\,a_\sigma + q\,(n+2-2\sigma)\,(n+1-2\sigma)\,a_{\sigma-1},
\end{aligned}
$$

kur įvesti tokie pažymėjimai:

$$b^2 + c^2 = p,\quad b^2 c^2 = q \text{ ir } v_s^n = K.$$

Eliminavę iš šių formulų koeficientus $a_1, a_2, \dots, a_\sigma$, gauname $\sigma+1$ laipsnio algebrinę lygtį, kuri nustato K. Yra įrodyta, kad ši algebrinė lygtis turi $\sigma+1$ realinių skirtingų šaknų. Tuomi ir įrodyta, kad egzistuoja $\sigma+1$ funkcijų $K(z)$, kurios nėra tiesiškai surištos. Reikia pažymėti, kad šios formulos yra savotiškos ta prasme, kad koeficientams a_m negalima nustatyti bendros formulos, kaip, pav., Legendre'o, Bessel'io ir kitoms funkcijoms. Pasirinkę atitinkamą a_0, matome, kad $K(z)$ dėl realinių z gali turėti tik realines reikšmes. Visa tai, kas čia pasakyta apie $K(z)$, tinka ir funkcijoms $L(z)$, $M(z)$ ir $N(z)$. Literatūroje jos yra žinomos paprastųjų Lamé funkcijų vardu.

Palyginę (2) ir (7) pareinamybes, matome, kad lygiai tiek pat, kiek yra Laplace'o rutulinių funkcijų, egzistuoja ir Lamé funkcijų sandaugų $f = E(\mu)E(\nu)$. Laplace'o rutulines funkcijas

galime suskirstyti taip pat į visiškai analogiškas 4 klases. Tam tikslui į (2) įvedame eliptiškas koordinatas, nustatytas (3) lygtimis. Pastebėję, kad Legendre'o m-tos eilės funkcijos yra formos:

$$P_{n,m}(\cos\vartheta) = (\sqrt{1-\cos^2\vartheta})^m \, P_n^{(m)}(\cos\vartheta) = \sin^m\vartheta \, P_n^{(m)}(\cos\vartheta),$$

kur $P_n^{(m)}(\cos\vartheta)$ yra Legendre'o polinomo $P_n(x)$ m-oji išvestinė dėl $x = \cos\vartheta$, ir atsižvelgę į formulas:

$$\cos m\varphi = \cos^m\varphi - \binom{m}{2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{m}{4}\cos^{m-4}\varphi\sin^4\varphi - + \ldots,$$

$$\sin m\varphi = \binom{m}{1}\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi +$$

$$+ \binom{m}{5}\cos^{m-5}\varphi\sin^5\varphi - + \ldots,$$

matome, kad Laplace'o rutulinės funkcijos yra sveikos racionalinės funkcijos trijų argumentų $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$, būtent:

$$P_{n,m}(\cos\vartheta)\cos m\varphi = \Big[(\cos\varphi\sin\vartheta)^m - \binom{m}{2}(\cos\varphi\sin\vartheta)^{m-2}(\sin\varphi\sin\vartheta)^2 +$$

$$+ \binom{m}{4}(\cos\varphi\sin\vartheta)^{m-4}(\sin\varphi\sin\vartheta)^4 - + \ldots\Big] P_n^{(m)}(\cos\vartheta),$$

$$P_{n,m}(\cos\vartheta)\sin m\varphi = \Big[\binom{m}{1}(\cos\varphi\sin\vartheta)^{m-1}\sin\varphi\sin\vartheta -$$

$$- \binom{m}{3}(\cos\varphi\sin\vartheta^{m-3}(\sin\varphi\sin\vartheta)^3 +$$

$$+ \binom{m}{5}(\cos\varphi\sin\vartheta)^{m-5}(\sin\varphi\sin\vartheta)^5 - + \ldots\Big] P_n^{(m)}(\cos\vartheta).$$

Įstatę į šias lygybes (3) pareinamybes, turime:

$$(8)\quad P_{n,m}(\cos\vartheta)\cos m\varphi = \Big[\left(\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}\right)^m +$$

$$- \binom{m}{2}\left(\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}\right)^{m-2}\left(\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}\right)^2 + \ldots\Big] P_n^{(m)}\left(\frac{\mu\nu}{bc}\right).$$

(9)

$$P_{n,m}(\cos\vartheta)\sin m\varphi = \Big[\binom{m}{1}\left(\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}\right)^{m-1}\left(\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}\right) +$$

$$- \binom{m}{3}\left(\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}\right)^{m-3}\left(\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}\right)^3 + - \ldots\Big] P_n^{(m)}\left(\frac{\mu\nu}{bc}\right).$$

Duodami m reikšmes 0, 1, 2, . . ., n, iš (8) ir (9) gauname 4 klases sekančių funkcijų:

$$
\begin{aligned}
&\sigma+1 \text{ funkcijų } P(\mu,\nu) = f_1(\mu,\nu)\\
&n-\sigma \quad \text{„} \quad Q(\mu,\nu) = \sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}\, f_2(\mu,\nu)\\
(10)\quad &n-\sigma \quad \text{„} \quad R(\mu,\nu) = \sqrt{c^2-\mu^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\, f_3(\mu,\nu)\\
&\sigma \quad \text{„} \quad S(\mu,\nu) = \sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{c^2-\mu^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\\
&\qquad\qquad f_4(\mu,\nu),
\end{aligned}
$$

kur σ turi anksčiau įvestą reikšmę, o $f_p(\mu,\nu)$ $(p=1, 2, 3, 4)$ yra sveikos racionalinės argumentų μ,ν funkcijos. Kai m yra lyginis skaičius, iš (8) gauname $P(\mu,\nu)$, iš (9) $S(\mu,\nu)$; kai m yra nelyginis skaičius, iš (8) gauname $Q(\mu,\nu)$, iš (9) $R(\mu,\nu)$. Visos šios Laplace'o rutulinės funkcijos yra (4) diferencialinės lygties sprendiniai.

§ 2.

Integralinių lygčių išvedimas.

Įvedę į (4) diferencialinę lygtį naujus kintamuosius:

$$
(11)\qquad s_1 = \int_o^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{b^2-\mu^2}\,\sqrt{c^2-\mu^2}},\quad t_1 = \int_o^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}},
$$

gauname:

$$
(12)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^{\,2}} - \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^{\,2}} - n(n+1)(\mu^2-\nu^2) f = 0.
$$

Lamé funkcijų diferencialinė lygtis (6) pereina į:

$$
(13)\qquad \frac{d^2E}{dr^2} - [n(n+1)\mu^2 - h]\,E = 0,
$$

kur vietoje s_1 arba t_1 parašyta r, ir h reiškia konstantą. Dabar įrodysime:

Jei funkcija $F(\mu,\nu)$ dėl $-b \leqq \mu, \nu \leqq b$ yra (12) diferencialinės lygties sprendinys, o $E(\mu)$ arba $E(\nu)$ toje pat srityje patenkina (13) diferencialinę lygtį, tai funkcija:

$$
(14)\qquad \psi(\mu) = \int_{-\omega}^{\omega} F(\mu,\nu)\, E(\nu)\, dt_1,
$$

kur ω reiškia:

$$\omega = \int_o^b \frac{d\mu}{\sqrt{b^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}, \tag{15}$$

yra taip pat (13) lygties sprendinys.

Įrodymui įstatome $\psi(\mu)$ į (13) diferencialinę lygtį:

$$\frac{d^2\psi(\mu)}{ds_1^2} - [n(n+1)\mu^2 - h]\psi(\mu) = \tag{16}$$

$$= \int_{-\omega}^{\omega} \left\{ \frac{\partial^2 F(\mu,\nu)}{\partial s_1^2} - [n(n+1)\mu^2 - h] F(\mu,\nu) \right\} E(\nu)\, dt_1 .$$

Kadangi $F(\mu,\nu)$ yra (12) diferencialinės lygties sprendinys, tai turime:

$$\frac{\partial^2 F(\mu,\nu)}{\partial s_1^2} - n(n+1)\mu^2 = \frac{\partial^2 F(\mu,\nu)}{\partial t_1^2} - n(n+1)\nu^2 .$$

Įvedę šią lygybę po integralo ženklu į (16), turime:

$$\frac{d^2\psi(\mu)}{ds_1^2} - [n(n+1)\mu^2 - h]\psi(\mu) = \tag{17}$$

$$= \int_{-\omega}^{\omega} \left\{ \frac{\partial^2 F(\mu,\nu)}{\partial t_1^2} - [n(n+1)\nu^2 - h] F(\mu,\nu) \right\} E(\nu)\, dt_1 .$$

Integruodami (17) lygybės pointegralinio reiškinio pirmąjį narį du kart dalimis, gauname:

$$\int_{-\omega}^{\omega} \frac{\partial^2 F(\mu,\nu)}{\partial t_1^2} E(\nu)\, dt_1 =$$

$$= \left[\frac{\partial F(\mu,\nu)}{\partial t_1^2} E(\nu) - F(\mu,\nu) \frac{dE(\nu)}{dt_1} \right]_{-\omega}^{\omega} + \int_{-\omega}^{\omega} F(\mu,\nu) \frac{d^2E}{dt_1^2} dt_1$$

$$= \left\{ \left[\frac{\partial F(\mu,\nu)}{\partial \nu} E(\nu) - F(\mu,\nu) \frac{dE(\nu)}{d\nu} \right] \sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2} \right\}_{-b}^{b} + \int_{-\omega}^{\omega} F(\mu,\nu) \frac{d^2E}{dt_1^2} dt_1$$

$$= \int_{-\omega}^{\omega} F(\mu,\nu) \frac{d^2E}{dt_1^2}\, dt_1 .$$

Įstatę šį rezultatą į (17) lygties dešiniąją pusę, galutinai gauname:

$$(18)\qquad \frac{\partial^2\psi(\mu)}{ds_1^2} - [n(n+1)\mu^2 - h]\psi(\mu) = \int_{-\omega}^{\omega} \left\{ \frac{d^2E(\nu)}{dt_1^2} - [n(n+1)\nu^2 - h]E(\nu) \right\} F(\mu,\nu)\, dt_1 .$$

Atsižvelgę į tai, kad $E(\nu)$ yra (13) lygties sprendinys, t. y., kad koeficientas prie $F(\mu,\nu)$ po integralo ženklu išnyksta, turime:

$$\frac{d^2\psi(\mu)}{ds_1^2} - [n(n+1)\mu^2 - h]\psi(\mu) = 0 .$$

Iš čia ir turime, kad $\psi(\mu)$ yra (13) lygties sprendinys.

Įvedę į (4) diferencialinę lygtį naujus kintamuosius:

$$(19)\qquad s_2 = \int_b^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}, \quad t_2 = \int_b^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}},$$

gauname:

$$(20)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2} + n(n+1)(\mu^2-\nu^2) f = 0 .$$

Lamé funkcijų diferencialinė lygtis (6) pereina į:

$$(21)\qquad \frac{d^2E}{dr^2} + [n(n+1)\mu^2 - h']E ,$$

kur r reiškia s_2 ar t_2 ir h' konstantą. Tomis pat sąlygomis, kaip anksčiau, visai taip pat galima įrodyti, kad ir funkcija:

$$(22)\qquad \psi_1(\mu) = \int_o^{\overline{\omega}} F(\mu,\nu) E(\nu)\, dt_2$$

yra (13) diferencialinės lygties sprendinys. $\overline{\omega}$ čia turi tokią reikšmę:

$$(23)\qquad \overline{\omega} = \int_b^{c} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}} .$$

Laplace'o funkcijos, nustatytos § 1 pareinamybėmis (8) ir (9), patenkina visas sąlygas, pastatytas funkcijai $F(\mu,\nu)$. Įstatę į (14) ar (22) vietoje $F(\mu,\nu)$ funkcijas $P(\mu,\nu)$, $Q(\mu,\nu)$, $R(\mu,\nu)$ $S(\mu,\nu)$, nustatytas (10) pareinamybėmis, gauname, kad $\psi(\mu)$

arba $\psi_1(\mu)$ yra sveikos racionalinės funkcijos argumentų μ, $\sqrt{\mu^2-b^2}, \sqrt{c^2-\mu^2}$. Kadangi Lamé diferencialinė lygtis (13) arba (21) dėl specialios konstantos $h=h_\alpha$ arba $h'=h'_\alpha$ reikšmės gali turėti tik vieną tokio tipo sprendinį, tai iš čia išeina, kad $\psi(\mu)$ arba $\psi_1(\mu)$, jei jos tapatingai neišnyksta, yra paprastosios Lamé funkcijos, nustatytos (7) pareinamybėmis. $\psi(\mu)$ arba $\psi_1(\mu)$ gali nuo (7) funkcijų skirtis tik pastoviu daugikliu, t. y. $\psi(\mu)=\frac{1}{\lambda}E(\mu)$ arba $\psi_1(\mu)=\frac{1}{\lambda'}E(\mu)$, kur λ ir λ' yra konstantos, o $E(\mu)$ reiškia paprastąją Lamé funkciją. Kitais žodžiais tariant, $E(\mu)$ patenkina integralinę lygtį:

$$(24)\quad E(\mu)=\lambda\int_{-\omega}^{\omega}F(\mu,\nu)E(\nu)\,d\nu_1 \text{ arba } E(\mu)=\lambda'\int_{o}^{\bar{\omega}}F(\mu,\nu)E(\nu)\,d\nu_2,$$

kur $F(\mu,\nu)$ reiškia Laplace'o rutulinę funkciją. Kadangi Laplace'o rutulinės funkcijos nėra ortogonalinės Lamé funkcijoms, tai $\psi(\mu)$ arba $\psi_1(\mu)$ tapatingai išnykti negali. Iš čia turime, kad paprastosios Lamé funkcijos (7) patenkina (24) integralinę lygtį.

Iš (12) arba (20) diferencialinės lygties išeina, kad $F(\mu,\nu)$ yra simetriška funkcija, t. y. $F(\mu,\nu)=F(\nu,\mu)$. Panaudodami simetriškų branduolių savybes, dabar įrodysime, kad (24) integralinė lygtis turi skirtingas ypatingas reikšmes ir funkcijas, kurios yra Lamé diferencialinės lygties (13) arba (21) sprendiniai.

Iš integralinių lygčių teorijos žinome, kad tą pačią diferencialinę lygtį, kurią patenkina integralinės lygties branduolys, patenkina ir visos branduolio tąsos (iterierte Kerne), kurios šiuo atveju išreiškiamos taip:

$$F^{(n)}(\mu,\nu)=\sum_{1}^{m}\frac{E_i(\mu)\,E_i(\nu)}{\lambda_i^n}\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,$$

kur m yra vienas skaičių $\sigma+1, n-\sigma, \sigma$; $F^{(n)}(\mu,\nu)$ yra n-toji branduolio tąsa, λ_i reiškia (24) lygties ypatingąją reikšmę ir $E_i(\mu)$ ypatingąją funkciją. Kai $n=1$, gauname patį branduolį, t. y. $F^{(1)}(\mu,\nu)=F(\mu,\nu)$.

Apskritai integralinės lygties ypatingosios reikšmės patenkina sąlygą:

$$\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\lambda_3\leqq\ldots\leqq\lambda_m.$$

Priimame, kad visos ypatingos reikšmės yra skirtingos, t. y.:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_m .$$

Pažymėję (12) arba (20) diferencialinę lygtį simboliu Δ, gaunume homogeninių lygčių sistemą:

$$\sum_1^m \Delta \frac{E_i(\mu)\, E_i(\nu)}{\lambda_i^n} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Kai visi λ_i yra skirtingi, ši lygčių sistema gali būti patenkinta tada ir tik tada, kai atskirai kiekviena sandauga $\Delta E_i(\mu)\, E_i(\nu) = 0$. Bet jei sanaduga $E_i(\mu)\, E_i(\nu)$ patenkina (12) arba (20) diferencialinę lygtį, tai $E_i(\mu)$ yra Lamé diferencialinės lygties (13) arba (21) sprendinys. Kadangi $E_i(\mu)$ yra integralinės lygties (24) sprendinys, tai dėl skirtingų λ_i atvirkščias dėsnis yra įrodytas.

Toliau įrodysime, kad mūsų atveju lygių λ_i nėra. Tam tikslui reikia įrodyti, kad determinantas:

$$(25) \quad D^1) = \begin{vmatrix} m & \int_a^b K(s,s)\,ds \ldots & \int_a^b K^{(m-1)}(s;s)\,ds \\ \int_a^b K(s,s)\,ds & \int_a^b K^{(2)}(s,s)\,ds \ldots & \int_a^b K^{(m)}(s,s)\,ds \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \int_a^b K^{(m-1)}(s,s)\,ds & \int_a^b K^{(m)}(s,s)\,ds \ldots & \int_a^b K^{(2m-2)}(s,s)\,ds \end{vmatrix},$$

kur $K^{(m)}(s,s)$ yra branduolio $K(s,t)$ tąsos dėl $s=t$, nelygus nuliui. Bet norint visus galimus atvejus kartu imti, skaičiavimai yra gana komplikuoti. Pasinaudodami Lamé diferencialinės lygties sprendinių žinomomis savybėmis, šiuo atveju visus skaičiavimus galime apeiti.

Leiskime, kad $\lambda_1 = \lambda_2$. Tada dėl tos pačios λ reikšmės egzistuoja du atskiri, tiesiškai nesurišti sprendiniai $E_1(\mu)$ ir $E_2(\mu)$, kurie patenkina dėl tos pačios konstantos h reikšmės (13) arba (21) diferencialinę lygtį.

---

[1]) Šią sąlygą, išreikštą vadinamiems paprastiems branduoliams (ausgeartete Kerne) integralinių lygčių literatūroje sutikti neteko. Prie progos § 4 ją gausime kaipo išvadą.

Turėdami du tiesiškai nesurištus sprendinius, Lamé diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį galime parašyti forma:

$$c_1 E_1(\mu) + c_2 E_2(\mu),$$

kur c_1 ir c_2 reiškia konstantas. Bet $E_1(\mu)$ ir $E_2(\mu)$, būdamos (24) integralinės lygties sprendiniai, kaip anksčiau esame pastebėję, yra sveikos racionalinės argumentų μ, $\sqrt{\mu^2-b^2}$, $\sqrt{\mu^2-c^2}$ funkcijos. Išeitų, kad ir bendrasis Lamé diferencialinės lygties sprendinys yra sveika racionalinė argumentų μ, $\sqrt{\mu^2-b^2}$, $\sqrt{\mu^2-c^2}$ f-ja. Čia turime prieštaravimą, nes bendrasis Lamé diferencialinės lygties sprendinys yra formos:

$$c_1 E(\mu) + c_2 F(\mu),$$

kur $F(\mu)$ dėl visų h reikšmių yra transcendentinė funkcija. Šį prieštaravimą gavome, priėmę $\lambda_1 = \lambda_2$, todėl integralinė lygtis (24) lygių ypatingų reikšmių neturi.

§ 3.

Integralinės lygtys.

§ 2 esame įrodę, kad visi (24) integralinės lygties sprendiniai yra paprastosios Lamé funkcijos. Pasinaudodami Laplace'o rutulinių funkcijų suskirstymu, nustatytu (10) pareinamybėmis, iš (24) integralinės lygties turime:

branduolio $F(\mu,\nu) = P(\mu,\nu)$ sprendiniai yra $S_1(\mu)$,
„ $F(\mu,\nu) = Q(\mu,\nu)$ „ „ $\sqrt{\mu^2-b^2}\, S_2(\mu)$,
„ $F(\mu,\nu) = R(\mu,\nu)$ „ „ $\sqrt{c^2-\mu^2}\, S_3(\mu)$,
„ $F(\mu,\nu) = S(\mu,\nu)$ „ „ $\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\, S_4(\mu)$,

kur $S_i(\mu)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ yra sveikos racionalinės argumento μ funkcijos. Palyginę šiuos sprendinius su Lamé funkcijomis, nustatytomis (7) pareinamybėmis, ir turėdami galvoje (24) lygties sprendinių skaičių ir (10) pareinamybes, gauname:

(26)
$\sigma+1$ branduolių $P(\mu,\nu)$ nustato Lamé funkcijas $K(\mu)$,
$n-\sigma$ „ $Q(\mu,\nu)$ „ „ „ $L(\mu)$,
$n-\sigma$ „ $R(\mu,\nu)$ „ „ „ $M(\mu)$,
σ „ $S(\mu,\nu)$ „ „ „ $N(\mu)$.

Suglaudę šiuos davinius, galime pasakyti:

egzistuoja $\sigma+1$ tiesiškai nesurištų branduolių $P(\mu,\nu)$, $n-\sigma$ branduolių $Q(\mu,\nu)$, $n-\sigma$ branduolių $R(\mu,\nu)$, σ branduolių $S(\mu,\nu)$, kurių kiekvienas turi branduolių skaičių atitinkantį skaičių realių skirtingų ypatingų reikšmių ir funkcijų, kurios yra tapatingos atitinkamoms Lamé funkcijų klasėms.

Tolimesniam (24) integralinių lygčių tyrimui įvesime Jacobi eliptiškas funkcijas. Į pirmąją (24) integralinę lygtį įvedę:

$$\mu = b\,\mathrm{sn}(s,k'), \quad \nu = b\,\mathrm{sn}(t,k'),$$

kur $s=cs_1$, $k'^2=\frac{b^2}{c^2}$, gauname:

$$E(s)=\lambda\int_{-K'}^{K'} F_1(s,t)\,E(t)\,dt, \tag{27}$$

kur K' yra Legendre'o normalinis eliptiškas integralas pirmos rūšies:

$$K'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}.$$

Įvedę į (24) antrąją lygtį pakeitimus:

$$\mu = c\,\mathrm{dn}(s,k), \quad \nu = c\,\mathrm{dn}(t,k),$$

kur $k^2=1-k'^2$, $s=K-cs_2$, gauname:

$$E(s)=\lambda\int_0^K F_2(s,t)\,E(t)\,dt, \tag{27a}$$

kur K yra taip pat pilnas Legendre'o normalinis eliptiškas integralas pirmos rūšies moduliu k^2.

Betkuriai Lamé funkcijų klasei definuoti iš (26) atitinkamos klasės branduolių galime pasirinkti tokį, kuris tiriamam klausimui yra tinkamiausias. Lamé funkcijų savybėms tirti, be abejo, tinkamiausi branduoliai yra Legendre'o polinomai, kurių teorija yra gerai išvystyta. Tokiems branduoliams gauti į Laplace'o rutulines funkcijas įvedame Jacobi eliptiškas funkcijas, ir į (8) įstatome $m=0,1$ ir į (9) $m=1,2$. Turėdami galvoj (10) ir (26) pareinamybes, iš (27) gauname tokias integralines lygtis:

$$
\begin{aligned}
K(s) &= \lambda \int_{-K'}^{K'} P_n(k' \operatorname{sn} s \operatorname{sn} t)\, K(t)\, dt, \\
L(s) &= \lambda \int_{-K'}^{K'} \operatorname{cn} s \operatorname{cn} t\, P'_n(k' \operatorname{sn} s \operatorname{sn} t)\, L(t)\, dt, \\
M(s) &= \lambda \int_{-K'}^{K'} \operatorname{dn} s \operatorname{dn} t\, P'_n(k' \operatorname{sn} s \operatorname{sn} t)\, M(t)\, dt, \\
N(s) &= \lambda \int_{-K'}^{K'} \operatorname{cn} s \operatorname{dn} s \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t\, P''_n(k' \operatorname{sn} s \operatorname{sn} t)\, N(t)\, dt.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Atitinkamai (27a) lygtis duoda tokias integralines lygtis:

$$
\begin{aligned}
K(s) &= \lambda \int_{o}^{K} P_n\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} s \operatorname{dn} t\right) K(t)\, dt, \\
L(s) &= \lambda \int_{o}^{K} \operatorname{cn} s \operatorname{cn} t\, P'_n\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} s \operatorname{dn} t\right) L(t)\, dt, \\
M(s) &= \lambda \int_{o}^{K} \operatorname{sn} s \operatorname{sn} t\, P'_n\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} s \operatorname{dn} t\right) M(t)\, dt, \\
N(s) &= \lambda \int_{o}^{K} \operatorname{cn} s \operatorname{dn} s \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t\, P''_n\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} s \operatorname{dn} t\right) dt.
\end{aligned}
\tag{28a}
$$

Neskaitant vienanarių daugiklių, (28) ir (28a) lygčių branduoliai yra išreikšti per Legendre'o polinomą ir jo pirmą ir antrą išvestinę. Bet (28) ir (28a) lygtims spręsti geriau tinka teigiamieji branduoliai. Kad (28) ir (28a) lygčių branduoliai nėra teigiamieji, tiesiog matyt iš Legendre'o polinomo, kuris integralo ribose kartu su savo išvestinėmis gali turėti teigiamas ir neigiamas reikšmes. Dabar parodysime, kad visoms Lamé funkcijų klasėms definuoti iš (26) galime parinkti ir teigiamuosius branduolius. Įvedę į (8) ir (9) pakeitimus:

$$\mu = c \operatorname{dn} s, \quad \nu = c \operatorname{dn} t,$$

gauname:

$$(8a)\quad \Phi(s,t)=\text{konst.}\left[\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^m+\binom{m}{2}\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^{m-2}(\operatorname{sn}s\operatorname{sn}t)^2+\dots\right] P_n^{(m)}\left(\frac{1}{k'}\operatorname{dn}s\operatorname{dn}t\right),$$

$$(9a)\quad \psi(s,t)=\text{konst.}\left[\binom{m}{1}\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^{m-1}\operatorname{sn}s\operatorname{sn}t+ +\binom{m}{3}\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^{m-3}(\operatorname{sn}s\operatorname{sn}t)^3+\dots\right] P_n^{(m)}\left(\frac{1}{k'}\operatorname{dn}s\operatorname{dn}t\right).$$

Duodami m reikšmes n ir $n-1$, iš (8a) ir (9a) galutinai gauname:

$$\Phi_1(s,t)=\text{konst.}\left[\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^n+\binom{n}{2}\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^{n-2}(\operatorname{sn}s\operatorname{sn}t)^2+\dots\right],$$

$$\Phi_2(s,t)=\text{konst.}\left[\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^{n-1}+ +\binom{n-1}{2}\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^{n-3}(\operatorname{sn}s\operatorname{sn}t)^2+\dots\right]\operatorname{dn}s\operatorname{dn}t,$$

$$(10a)\quad \psi_1(s,t)=\text{konst.}\left[\binom{n}{1}\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^{n-1}\operatorname{sn}s\operatorname{sn}t+ +\binom{n}{3}\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^{n-3}(\operatorname{sn}s\operatorname{sn}t)^3+\dots\right],$$

$$\psi_2(s,t)=\text{konst.}\left[\binom{n-1}{1}\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^{n-2}\operatorname{sn}s\operatorname{sn}t+ +\binom{n-1}{3}\left(\frac{\operatorname{cn}s\operatorname{cn}t}{k'}\right)^{n-4}(\operatorname{sn}s\operatorname{sn}t)^3+\dots\right]\operatorname{dn}s\operatorname{dn}t.$$

Visos šios funkcijos srityje $o\leqq s,t\leqq K$ yra teigiamos. Turėdami galvoje (26) pareinamybes, iš (27a) integralinės lygties dėl lyginio n gauname:

$$(29)\quad \begin{aligned} K(s,t)&=\lambda\int_o^K\Phi_1(s,t)\,K(t)\,dt,\\ L(s,t)&=\lambda\int_o^K\Phi_2(s,t)\,L(t)\,dt,\\ M(s,t)&=\lambda\int_o^K\psi_2(s,t)\,M(t)\,dt,\\ N(s,t)&=\lambda\int_o^K\psi_1(s,t)\,N(t)\,dt. \end{aligned}$$

Kai n yra nelyginis skaičius, (27a) lygtis duoda tokias integralines lygtis:

$$
\begin{aligned}
K(s) &= \lambda \int_0^K \Phi_2(s,t)\, K(t)\, dt, \\
L(s) &= \lambda \int_0^K \Phi_1(s,t)\, L(t)\, dt, \\
M(s) &= \lambda \int_0^K \psi_1(s,t))\, M(t)\, dt, \\
N(s) &= \lambda \int_0^K \psi_2(s,t)\, N(t)\, dt.
\end{aligned}
\tag{29a}
$$

Visų šių integralinių lygčių branduoliai $F(s,t)$ yra simetriški ir teigiami, išreiškiami taip:

$$
F(s,t) = \sum_1^m \alpha_i(s)\, \beta_i(t), \tag{30}
$$

kur $\alpha_i(s)$, $\beta_i(s)$ $(i=1, 2, 3, \ldots, m)$ yra tiesiškai nesurištos funkcijos ir m yra vienas skaičių $\sigma+1$, $n-\sigma$, σ. Sprendžiant šias integralines lygtis, skaičiavimo technikai labai patogu, kai charakteringasis determinantas arba sekularinė lygtis yra simetriška. Apskritai šiam tikslui reikia $2m$ funkcijų sistemą: $\alpha_1(s)$, $\alpha_2(s), \ldots,$ $\alpha_m(s)$, $\beta_1(s)$, $\beta_2(s), \ldots, \beta_m(s)$ išreikšti per ortogonalines funkcijas $\omega_1(s)$, $\omega_2(s), \ldots \omega_p(s)$, kas, kaip žinome, visada yra galima, nors skaičiavimai yra gana komplikuoti[1]). Bet mūsų atveju šiuos skaičiavimus galima apeiti. Reikia tik branduolius, nustatytus (10a) pareinamybėmis, perrašyti taip, kad $\alpha_i(s) \equiv \beta_i(s)$. Taip, pav., branduolys $\Phi_1(s,t)$ bus formos:

$$
\Phi_1(s,t) = \text{konst.}\,[\alpha_1(s)\,\alpha_1(t) + \alpha_2(s)\,\alpha_2(t) + \alpha_3(s)\,\alpha_3(t) + \ldots],
$$

jei rašysime:

$$
\alpha_1(s) = \left(\frac{\operatorname{cn} s}{\sqrt{k'}}\right)^n, \quad \alpha_2(s) = \sqrt{\binom{n}{2}}\left(\frac{\operatorname{cn} s}{\sqrt{k'}}\right)^{n-2} \operatorname{sn}^2 s, \quad \alpha_3(s) = \sqrt{\binom{n}{4}}\left(\frac{\operatorname{cn} s}{\sqrt{k'}}\right)^{n-4} \operatorname{sn}^4 s, \ldots
$$

---

[1]) Plg. R. v. Mises u. Ph. Frank, Die Differential—und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2 leid. (1930) 377 p.

§ 4.

Apytikriai integralinių lygčių sprendiniai.

Iš integralinių lygčių teorijos žinome, kad nehomogeninė integralinė lygtis:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b F(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

prie tam tikrų sąlygų turi sprendinį formos:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \Gamma(s,t)\,f(t)\,dt, \tag{31}$$

kur pointegralinė funkcija yra:

$$\Gamma(s,t) = \frac{D(s,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{31a}$$

ir $D(s,t;\lambda)$, $D(\lambda)$ apskritai išreiškiamos begalinėmis eilutėmis:

$$D(s,t;\lambda) = D_0(s,t) - \frac{1}{1!}D_1(s,t)\lambda + \frac{1}{2!}D_2(s,t)\lambda^2 - + \ldots \tag{32}$$

$$D(\lambda) = 1 - \frac{1}{1!}D_1\lambda + \frac{1}{2!}D_2\lambda^2 - + \ldots \tag{33}$$

Eilučių nariai $D_h(s,t)$ ir D_h $(h=1, 2, 3\ldots)$ išreiškiami daugialypiais integralais:

$$D_h(s,t) = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} F(s,t) & F(s,s_1) \ldots F(s,s_h) \\ F(s_1,t) & F(s_1,s_1) \ldots F(s_1,s_h) \\ \ldots & \ldots \\ F(s_h,t) & F(s_h,s_1) \ldots F(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \ldots ds_h, \tag{34}$$

$$D_h = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} F(s_1,s_1) & F(s_1,s_2) \ldots F(s_1,s_h) \\ F(s_2,s_1) & F(s_2,s_2) \ldots F(s_2,s_h) \\ \ldots & \ldots \\ F(s_h,s_1) & F(s_h,s_2) \ldots F(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \ldots ds_h, \tag{35}$$

kur $D_0(s,t) = F(s,t)$[1]).

---

[1]) Plg. Courant u. Hilbert, l. c. 122 p. Čia paimtos formulos yra atitaisytos: (70) formulą reikia imti su priešingu ženklu, o (71) turi būti $D(s,t;\lambda) = -\Delta(\beta(t), \alpha(s);\lambda)$.

(31) Sprendinys egzistuoja visoms λ reikšmėms, išskiriant $D(\lambda)$ nulines vietas.

Toliau žinome, kad $(\Gamma s, t; \lambda)$ išreiškiamas vadinama Neumann'o eilute:

$$(36) \qquad \Gamma(s, t; \lambda) = F^{(1)}(s,t) + \lambda F^{(2)}(s,t) + \lambda^2 F^{(3)}(s,t) + \ldots,$$

kur $F^{(n)}(s,t)$ yra branduolio $F(s,t)$ n-ji tąsa, išreiškiama formula:

$$(36a) \quad F^{(n)}(s,t) = \int_a^b F^{(n-1)}(s,\sigma) F(\sigma,t)\, d\sigma = \int_a^b \ldots \int_a^b F(s,\sigma_1) F(\sigma_1,\sigma_2) \ldots F(\sigma_{m-1}, t)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \ldots d\sigma_{m-1},$$

kur $F^{(1)}(s,t) = F(s,t)$.

Neumann'o eilutė konverguoja dėl pakankamai mažų $|\lambda|$ reikšmių. Palyginę (31a) ir (36) išraiškas, matome, kad (36) eilutės konverguotumo spindulys yra lygus savo absoliutiniu didumu mažiausiai vardiklio $D(\lambda)$ nulinei vietai. E. Schmidt'as, įrodinėdamas simetriškojo branduolio ypatingų reikšmių ir funkcijų egzistenciją, gavo, kad (36) eilutės konverguotumo spindulys r yra:

$$(37) \qquad r = \lim_{\nu \to \infty} \sqrt{\frac{U_{2\nu}}{U_{2\nu+2}}},$$

kur $U_{2\nu} = \int_a^b F(s,s)\, ds$[2].

Pritaikę tai pačiai eilutei kitą konverguotumo pažymį, turime:

$$(38) \qquad r^2 = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{U_{2\nu}}}.$$

Pritaikę branduolio $F(s,t)$ tąsos formulai:

$$F^{(m+n)}(s,t) = \int_a^b F^{(m)}(s,\sigma)\, F^{(n)}(\sigma,t)\, d\sigma$$

Schwarz'o nelygybę[1]), turime:

$$(39) \qquad U^2_{m+n} \leqq U_{2m}\, U_{2n} \text{ ir } U_{2m+2n} \leqq U_{2m}\, U_{2n}.$$

---

[2]) E. Schmidt, zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen, Math. Ann., 63 t. (1907), 445 p.

[1]) Courant u. Hilbert, l. c. 40 p.

Pirmosios nelygybės specialus atvejis, kai $m=\nu-1$, $n=\nu+1$, duoda:

$$\frac{U_{2\nu}}{U_{2\nu+2}} \leqq \frac{U_{2\nu-2}}{U_{2\nu}}. \tag{40}$$

Perrašę antrąją nelygybę (39) taip:

$$\frac{1}{U_{2n}} \leqq \frac{U_{2m}}{U_{2m+2}} \cdot \frac{U_{2m+2}}{U_{2m+4}} \cdots \frac{U_{2m+2n-2}}{U_{2m+2n}},$$

ir perėję prie ribos, kai $m \to \infty$, gauname:

$$r^2 \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{U_{2n}}}. \tag{41}$$

Sujungę (37), (38) ir (41), turime:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{U_{2n}}} \leqq r^2 \leqq \frac{U_{2n}}{U_{2n+2}}. \tag{42}$$

Ši formula nustato ypatingąją reikšmę, kurios absoliutinis didumas yra mažiausias. Lieka tik nustatyti jos ženklą, kas apskritai reikalauja dar specialaus skaičiavimo. Bet mūsų atveju šis klausimas atpuola: teigiamieji branduoliai, nustatyti (10a) pareinamybėmis, turi tik teigiamas ypatingas reikšmes. (42) formulai taikinti reikia žinoti branduolio $F(s,t)$ tąsų integralai dėl $s=t$. Jiems nustatyti panaudosim specialiai perrašytą $[\alpha_i(s) \equiv \beta_i(s)]$(30) formulą:

$$F(s,t) = \sum_1^m \alpha_i(s)\,\alpha_i(t). \tag{43}$$

Iš (36a) formulos tiesiog gauname branduolio $F(s,t)$ p-tąją tąsą:

$$F^{(p)}(s,t) = \sum_1^m C_{rs}^{(p-1)}\,\alpha_r(s)\,\alpha_s(t), \tag{44}$$

kur $C_{rs} = \int_o^K \alpha_r(s)\,\alpha_s(s)\,ds$ ir koeficientai C_{rs}^{p-1} yra matricos (C_{rs}), pakeltos $p-1$ laipsniu, elementai, būtent:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} \end{pmatrix}^{p-1} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(p-1)} & C_{12}^{(p-1)} & \dots & C_{1m}^{(p-1)} \\ C_{21}^{(p-1)} & C_{22}^{(p-1)} & \dots & C_{2m}^{(p-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1}^{(p-1)} & C_{m2}^{(p-1)} & \dots & C_{mm}^{(p-1)} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Integruodami (44) dėl $s=t$ ribose $o \leqq s \leqq K$, gauname:

$$(46)\quad U_{2n} = \int_o^K F^{(2n)}(s,s)\,ds = \sum_1^m{}_{rs}\, C_{rs}^{(2n-1)} \int_o^K \alpha_r(s)\,\alpha_s(s)\,ds = \sum_1^m{}_i\, C_{ii}^{(2n)}.$$

Iš čia išeina, kad U_{2n} apskaičiuoti reikia matricą (C_{rs}) pakelti $2n$ laipsniu ir taip gautos matricos $(C_{rs}^{(2n)})$ paimti pagrindinės įstrižainės elementų sumą. Matricos (C_{rs}) ir $(C_{rs}^{(2n)})$ yra simetriškos.

Nustatę pakankamai tikslią ypatingąją reikšmę λ_1, galime rasti apytikrę ypatingąją funkciją. Iš integralinių lygčių teorijos žinome, kad ypatingąją funkciją $\varphi(s)$ nustato pareinamybė:

$$(47)\qquad \varphi(s) = \sum_1^m{}_i\, \alpha_i(s)\, x_i,$$

kur x_i nustato lygčių sistema:

$$x_p = \lambda_1 \sum_1^m{}_i\, C_{ip}\, x_i \qquad p = 1, 2, 3, \ldots m,$$

kurios determinantas lygus nuliui. Bet kurios eilės visi šio determinanto subdeterminantai išnykti negali: § 2 esame įrodę, kad branduoliai kartotinių ypatingų reikšmių neturi. Todėl (47) pareinamybė, išskiriant pastovų daugiklį, ypatingąją funkciją nustato vienareikšmiai.

Toliau sudarome branduolį $F_1(s, t)$:

$$F_1(s,t) = F(s,t) - \frac{\varphi_1(s)\ \varphi_1(t)}{\lambda_1},$$

kuris, kaip matyt iš (47) pareinamybės, redukuojasi į tokią išraišką:

$$F_1(s,t) = \sum_1^{m-1}{}_i\, \frac{\varphi_{i+1}(s)\,\varphi_{i+1}(t)}{\lambda_{i+1}}$$

Šis branduolys yra tokio pat tipo, kaip ir $F(s,t)$, tik turi vienu daugikliu mažiau. Pritaikę visas formulas, panaudotas branduoliui $F(s,t)$, gausime apytikrę ypatingąją reikšmę λ_2 ir ypatingąją funkciją $\varphi_2(s)$. Eidami šiuo keliu toliau, galime nustatyti visas apytikres reikšmes λ_i ir funkcijas $\varphi_i(s)$, $i=1, 2, 3, \ldots, m$.

Iš integralinių lygčių teorijos žinome, kad branduolio $F(s,t)$ p-ji tąsa $F^{(p)}(s,t)$ turi tas pačias ypatingas funkcijas; jos ypatingosios reikšmės yra branduolio $F(s,t)$ ypatingų reikšmių p-ji

laipsniai. Todėl gautas formulas galima taikyti ir visiems metodams, kurie remiasi sudarymu naujų lygčių, kurių nulinės vietos yra pagrindinių lygčių nulinių vietų p-ji laipsniai. Šiam tikslui reikia apskaičiuoti (33) eilutės, kuri mūsų atveju yra baigtinė, koeficientus D_h, išreikštus daugialypiais integralais (35). Bet šie skaičiavimai apskritai yra labai komplikuoti. Paprastai, palyginti, jie išreiškiami per branduolio tąsų integralus, išreikštus (46) pareinamybe, būtent[1]):

$$(48)\qquad D_\nu = \begin{vmatrix} U_1 & \nu-1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ U_2 & U_1 & \nu-2 & 0 & 0 \dots & 0 \\ U_3 & U_2 & U_1 & \nu-3 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{\nu-1} & U_{\nu-2} & \dots & \dots & \dots & 1 \\ U_\nu & U_{\nu-1} & \dots & \dots & \dots & U_1 \end{vmatrix},$$

iš kur $D_1=U_1$, $D_2=U_1^2-U_2$ ir t. t....

Tad norėdami nustatyti lygtis, kurių ypatingosios reikšmės yra p-tieji laipsniai pagrindinių lygčių ypatingųjų reikšmių, turėsime tik į visas formulas vietoje $F(s,t)$ įstatyti $F^{(p)}(s,t)$.

Dabar išvesime determinantą, nustatytą (25) pareinamybe. Pažymėję atvirkščias ypatingas reikšmes λ per $\frac{1}{\nu}$, branduolio $F(s,t)$ ν reikšmėms nustatyti iš (33) gauname lygtį:

$$(49)\qquad \nu^m - D_1\nu^{m-1} + \frac{1}{2!}D_2\nu^{m-2} - + \dots \frac{(-1)^m}{m!}D_m = 0.$$

Pažymėję šios lygties šaknis ν_α, $\alpha = 1, 2, 3, \dots, m$, turime:

$$D_1 = \sum_1^m{}^\alpha \nu_\alpha$$

Atsižvelgę į (48), gauname:

$$\sum_1^m{}^\alpha \nu_\alpha = U_1.$$

---

[1]) Plg. A. G. Webster — G. Szegö, Partielle Differentialgleichungen der Mathematischen Physik (1930) 452 ir 454 p.

Pakeitę $F(s,t)$ per $F^{(p)}(s,t)$, gauname:

$$(50) \qquad \sum_{1}^{m} \alpha \, \nu_{\alpha}^{p} = U_p = \int_{o}^{K} F^{(p)}(s,s)\, ds, \quad p = 1,2,3,\ldots$$

Lygtis (49) turi tada ir tik tada skirtingas šaknis, jei determinantas:

$$(51) \qquad D = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \cdot & \cdot & \varphi_{m-1} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdot & \cdot & \varphi_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{m-1} & \varphi_m & \cdots & & \varphi_{2m-2} \end{vmatrix},$$

kur $\varphi_p = \sum_{1}^{m} \alpha \, \nu_{\alpha}^{p}$ ir $\varphi_0 = m$, neišnyksta. Įstatę į šį determinantą vietoje φ_p reikšmes iš (50), gauname (25) determinantą.

Apskritai (49) tipo lygties šaknys yra realios ir skirtingos, jei (51) determinanto visi pagrindiniai subdeterminantai yra teigiami. Iš integralinių lygčių teorijos žinome, kad realūs simetriškieji branduoliai gali turėti tik realias ypatingas reikšmes. Mūsų atveju esame įrodę, kad visos ypatingos reikšmės yra realios ir skirtingos, todėl turime atvirkščią išvadą: (25) determinanto visi pagrindiniai subdeterminantai yra teigiami.

Kaunas, 1936 m. rugsėjo mėn.

ZUSAMMENFASSUNG.

In der vorliegenden Arbeit wird nachgewiesen, dass jede lineare homogene Integralgleichung:

$$E(s)=\lambda\int_{o}^{K} f(s,t)\,E(t)\,dt \quad \text{bzw.} \quad E(s)=\lambda\int_{-K'}^{K'} f(s,t)\,E(t)\,dt,$$

wo $f(s,t)$ eine in elliptische Koordinaten transformierte Laplacesche Kugelfunktion n-ter Ordnung und $4K$ bzw. $4K'$ die Periode bestimmter elliptischen Funktionen ist, untereinander verschiedene Eigenwerte und Eigenfunktionen besitzt, die mit den gewöhnlichen Laméschen Funktionen identisch sind. Aus gewissen Vorbemerkungen über Laplacesche Kugelfunktionen ergibt sich weiter, dass es $\sigma+1$ linear unabhängige symmetrische Kerne $P(\mu,\nu)$ bzw. $n-\sigma$ Kerne $Q(\mu,\nu)$ bzw. $n-\sigma$ Kerne $R(\mu,\nu)$ bzw. σ Kerne $S(\mu,\nu)$ gibt, deren jeder $\sigma+1$ bzw. $n-\sigma$ bzw. $n-\sigma$ bzw. σ voneinander verschiedene Eigenwerte und Eigenfunktionen besitzt, wenn $\sigma=\frac{1}{2}n$ bei geradem n, wenn $\sigma=\frac{1}{2}(n-1)$ bei ungeradem n ist. Die Eigenfunktionen eines jeden Kernes $P(\mu,\nu)$ bzw. $Q(\mu,\nu)$ bzw. $R(\mu,\nu)$ bzw. $S(\mu,\nu)$ sind mit den 4 Klassen Laméscher Funktionen $K(\mu)$ bzw. $L(\mu)$ bzw. $M(\mu)$ bzw. $N(\mu)$ identisch. Weiter wird gezeigt, dass jede Klasse Laméscher Funktionen stets durch eine Integralgleichung mit positiv definitem Kern definiert werden kann, was für die numerische Darstellung der Lösungen von Bedeutung ist. Auf Grund der dargelegten Ausführungen wird mittels der Methoden der Theorie der Integralgleichungen ein Weg gezeigt, die Lösungen wirklich mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.

Kaunas, September 1936.

V. D. U. Matematikos-Gamtos Fakulteto leidiniai:

1. L. U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, I tomas 1922 m. 10.—
2. L. U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, II tomas 1923 m. 10.—
3. L. U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, III tomas 1924—1926 m. ..... 20.—
4. L. U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, IV tomas 1927—1928 m. ..... 25.—
5. Prof. P. Matulionis. Sumedėjusių augalų skirstymui medžiaga 1923 m. ..... 3.—
6. Prof. T. Ivanauskas. Vadovėlis vabzdžiams rinkti 1924 m. 3.50
7. Prof. K. Regelis. Vadovėlis augalams rinkti 1925 m. ..... 2.—
8. Lab. A. Minkevičius. Bulvių puvimo grybelis ir kaip su juo kovoti 1926 m. ..... —
9. Prov. K. Grybauskas. Paletrūnas oželinis 1926 m. ..... —
10. Prov. K. Grybauskas. Garstyčia baltoji 1926 m. ..... —
11. Prov. K. Grybauskas. Vaistingieji Lietuvos laukų augalai ir jų pritaikymas 1927 m. ..... 5.—
12. Prof. V. Čepinskis, Elektroninė valentingumo teorija 1928 m. 6.—
13. B. Kodatis. Astronomijos paskaitos I d. ..... 10.—
14. B. Kodatis. Astronomijos paskaitos II d. ..... 10.—
15. Prov. K. Grybauskas. Ramunėliai, antroji laida 1928 m. 0,15
16. Prov. K. Grybauskas. Pipirmėtė, antroji laida 1928 m. 0,20
17. Asist. A. Žvironas. 18 Fizikos praktikos darbų 1928 m. ..... 2.—
18. Prov. K. Grybauskas. Ybiškė švelnioji 1928 m. 0,50
19. O. Volk'as. Aukštoji algebra ..... 10.—
20. Prof. O. Volk'as. Paprastųjų ir dalinių diferencialinių lygčių teorijos paskaitos 1929 m. ..... 20.—
21. Prof. F. Butkevičius. Elementarinis kokybinis analizis 1929 m. 20.—
22. Prof. V. Čepinskis. Cheminė pusiausvyra, II dal. 1930 m. .... 15.—
23. Prof. V. Čepinskis. Cheminė kinetika ir fotochemija, III dal. 1930 15.—
24. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, V t. 1 sąsiuv. 1930 m. ..... 15.—
25. Prof. F. Butkevičius. Retųjų elementų kokybin
26. Prof. T. Ivanauskas. Vadovėlis Lietuvos pau
1931 m. .....

VDU biblioteka
090 10030260 9

5(05)

27. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, siuvinys 1931 m. ..... 15.—
28. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VI tomo 1 sąsiuvinys 1931—1932 m. ..... 3.—
29. Inž. A. Zubrys. Organinės chemijos praktikos darbai 1931 m. 8.—
30. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VI tomo Geografijos sąsiuvinys 1931—1932 m. ..... 10.—
31. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VI tomo 2 sąsiuvinys, Geologijos skyrius 1931—1932 m. ..... 10.—
32. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VII tomo 1 sąsiuvinys, Botanikos skyrius 1931—1932 m. ..... 15.—
33. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VII tomo 2 sąsiuvinys, Fizikos skyrius 1931—1932 m. ..... 6.—
34. V. Čepinskis. Elektrochemija (Fizinės chemijos IV d.) ..... 10.—
35. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VI tomo 3 sąsiuvinys, Zoologijos skyrius 1932—1933 m. ..... 15.—
36. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VII tomo 3 sąsiuvinys, Geologijos skyrius 1933—1934 m. ..... 7.—
37. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VII tomo 4 sąsiuvinys 1933 m. ..... 7.—
38. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, VIII tomas 1934 m. ..... 20.—
39. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, IX tomo 1 sąs., Zoologijos skyrius 1935 m. ..... 5.—
40. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, IX tomo 2 sąsiuvinys, Botanikos skyrius 1935 m. ..... 6.—
41. Prof. K. Regelis. Augalų sistematika, I dalis 1935 m. ..... 10.—
42. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, IX tomo 3 sąsiuvinys, Mineralogijos ir Geologijos skyrius 1935 m. ..... 8.—
43. V.D.U. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai, X tomo 1 sąsiuvinys, Fizikos ir chemijos skyrius 1936 m. .....

V.D.U. MATEMATIKOS-GAMTOS FAKULTETO LEIDINIAI PARDUODAMI KOOPERACIJOS BENDROVĖJE

„SPAUDOS FONDE“
KAUNAS, LAISVĖS AL. NR. 62.